CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS PC/PSI

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

Remarques préliminaires, notations et résultats admis

L'énoncé du problème fera usage des notations ci-dessous. Les résultats suivants seront admis sans qu'il soit besoin de les justifier.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\varnothing$ l'ensemble vide.

Le coefficient du binôme sera noté de préférence :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Liberté est toutefois laissée aux candidats d'utiliser en lieu et place de cette notation

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dans tout le problème, on considère des polynômes à coefficients réels de la variable réelle x, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où, par convention, $x^0 = 1$, et a_0, ..., $a_k \in \mathbb{R}$. Le degré de P est noté $d^\circ(P)$. Sa valeur est, par convention, $d^\circ(P) = n$ si $a_n \neq 0$, et $d^\circ(P) = -\infty$ si $a_0 = \ldots = a_n = 0$, c'est-à-dire si P est le polynôme nul, ce que l'on note par $P = 0$.

Problème

1-1 Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, tels que $d^\circ(B_n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et vérifiant les identités suivantes :

(i) $B_0(x) = 1$;

(ii) $\frac{d}{dx} B_n(x) = nB_{n-1}(x)$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1-2 Montrer que les polynômes $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ vérifient l'identité, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(iv) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

1-3 Montrer l'existence d'une suite de constantes $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait l'identité

(v) $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$$

Quelle relation lie b_n et $B_n(0)$?

1-4 Etablir l'identité, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(vi) $$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Indication *: On fera usage de* (v) *pour développer* $B_k(x)$ *dans le membre de droite de* (vi) *en une somme de* $k+1$ *termes.*

1-5 Evaluer b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, et donner les expressions explicites des polynômes $B_n(x)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

1-6 Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 B_n(x)dx$ s'exprime de manière simple en fonction de n, $B_{n+1}(1)$ et $B_{n+1}(0)$. En déduire que :

(vii) $b_{2k+1} = 0 \quad \forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$.

1-7 On pose $Q_n(x) = B_n(x) - nb_1 x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention que $nx^{n-1} = 0 \ \forall x$ pour $n = 0$. Comparer $Q_n(x)$ et $Q_n(-x)$. En déduire que les polynômes $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ vérifient les identités (viii) et (ix) suivantes (avec la convention ci-dessus pour nx^{n-1}) :

(viii) $B_n(-x) = (-1)^n \{B_n(x) + nx^{n-1}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ix) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1-8 Etablir les identités, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(x) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$$

2 On appelle équation aux différences finies d'ordre 1 toute équation en f de la forme

$(E.\phi) \quad f(x+1) - f(x) = \phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$,

où f et ϕ sont des fonctions réelles de la variable réelle x, avec ϕ connue, et f inconnue. On appelle *solution* de $(E.1)$ toute fonction f vérifiant $(E.1) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dans le cas particulier où le second membre de $(E.1)$ s'annule, on appelle fonction (1)-périodique toute fonction réelle g de la variable réelle x telle que :

$(E.0) \quad g(x+1) - g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}(1)$ l'ensemble des fonctions (1)-périodiques.

2-1 Soient f_1 et f_2 deux solutions de $(E.\phi)$. Que peut-on dire de $g = f_1 - f_2$? En déduire la forme générale des solutions de $(E.\phi)$ connaissant une solution particulière f de $(E.\phi)$ et l'ensemble $\mathcal{P}(1)$ des fonctions (1)-périodiques.

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions réelles de variable réelle, et λ, μ deux réels. On désigne par f_1 une solution de $(E.\phi_1)$, et par f_2 une solution de $(E.\phi_2)$. Montrer qu'on dispose alors d'une solution de $(E.\lambda\phi_1 + \mu\phi_2)$ s'exprimant simplement à partir de λ, μ, f_1 et f_2.

2-2 On désigne par $P(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ un polynôme réel de degré $d^\circ(P)\le N$. En faisant usage des résultats de la question **1**, montrer l'existence d'une solution de $(E.P)$ s'exprimant simplement à partir des coefficients $\{a_n : 0\le n\le N\}$ de P, et des polynômes $\{B_n(x):0\le n\le N+1\}$.

En déduire la forme générale des solutions de $(E.P)$.

3-1 Quelle relation lie les quantités $f(x+K)$, $f(x)$ et $\sum_{m=0}^{K-1}\phi(x+m)$ lorsque la fonction f est solution de $(E.\phi)$ et $K\ge 1$, $K\in\mathbb{N}$ un entier positif ?

On considère les trois conditions (A), (B) et (C) suivantes :

(A) Il existe une solution f de $(E.\phi)$ pour laquelle la limite $L=\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est définie dans $\mathbb{R}$;

(B) La série $\sum_{m=0}^{+\infty}\phi(x+m)$ converge $\forall\, x\in\mathbb{R}$;

(C) La série $\sum_{m=0}^{+\infty}\phi(x+m)$ converge $\forall\, x\in\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}\phi(x+m)\right\}=0$.

Montrer que $(A)\Rightarrow(B)$.

Montrer que si la condition (B) est satisfaite, alors la fonction $f_0(x)=-\sum_{m=0}^{+\infty}\phi(x+m)$ est solution de $(E.\phi)$. Sous cette hypothèse, donner la forme générale des solutions de $(E.\phi)$.

Montrer que si la condition (B) est satisfaite, il ne peut exister de solution f de $(E.\phi)$ pour laquelle la limite $L=\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est définie dans $\mathbb{R}$ que si la condition (C) est vérifiée. Sous cette dernière hypothèse, montrer que la valeur de L détermine alors uniquement f.

En déduire que $(A)\Leftrightarrow(C)$.

3-2 On considère la fonction définie par $\psi(x)=1$ lorsque $x\in\mathbb{Q}$ et $\psi(x)=0$ lorsque $x\notin\mathbb{Q}$, $x\in\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction ψ ainsi définie est solution de $(E.0)$, et donc que $\psi\in\mathcal{P}(1)$.

Soit f une solution de $(E.\phi)$. Montrer que, en général, $(B)\not\Rightarrow(A)$.

3-3 Soit $\lambda>0$ une constante positive. Préciser les solutions de $(E.\phi)$ lorsque $\phi(x)=e^{-\lambda x}$ pour $x\in\mathbb{R}$. Déterminer, si elles existent, les solutions de $(E.\phi)$ vérifiant (A).

4-1 En faisant usage des résultats des questions précédentes, montrer que, pour tout $K\ge 1$, $N\ge 1$, $K\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}$, la somme $\sum_{m=0}^{K-1}(x+m)^N$ s'exprime simplement en fonction de N, $B_{N+1}(x+K)$ et $B_{N+1}(x)$. En déduire une relation simple liant N, $B_{N+1}(K)$, b_{N+1} et $\sum_{m=0}^{K-1} m^N$.

4-2 Montrer qu'il existe des coefficients $\{a_{N,k} : 0\le k\le N\}$ tels que $\sum_{m=0}^{K-1} m^N=\sum_{k=0}^{N} a_{N,k}K^{N+1-k}$ et déterminer leurs valeurs numériques exactes pour $N=1,2,3,4$.